Tous les objets seront assimilés à des points matériels

Exercices d'application : Calcul, ascenseur, clefs, distance de sécurité, espace des phases, mouvement circulaire, carrousel, spirale logarithmique, godille, bretelle, coordonnées sphériques

Culture en sciences physiques : Clefs, accident, basket, conjonction, mouvement circulaire, carrousel, solide en rotation, coordonnées sphériques, dilatation du temps

Corrigés en TD : clefs, accident, basket, carrousel, bretelle, godille

Coordonnées cartésiennes

Exercice 1 : Calcul

On considère un mouvement décrit par les équation horaires :

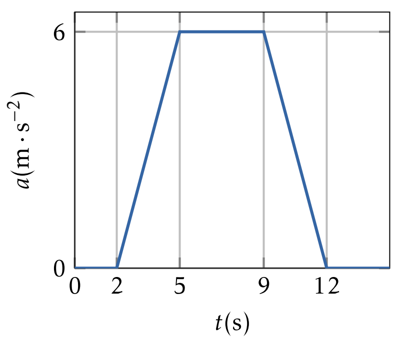
$$x = a_0 t^2 + x_0 \quad y(t) = v_0 t \quad z(t) = z_0,$$

avec a_0, v_0 et z_0 des constantes positives.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne. Déterminer également les expressions de leurs normes.
2. Tracer la trajectoire de la courbe et y représenter le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en $t = 0$.
3. Déterminer le ou les instants t tels que $x = 2x_0$ et y représenter également le vecteur vitesse.

Exercice 2 : Utilisation de courbes

On donne ci-contre la courbe représentant l'accélération en fonction du temps au cours d'un mouvement rectiligne. À la date $t_1 = 1\,\mathrm{s}$, sa vitesse est $v_1 = 3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Déterminer sa vitesse aux dates $t_2 = 4\,\mathrm{s}$ et $t_3 = 15\,\mathrm{s}$.



Exercice 3 : Ascenseur

Un ascenseur est animé d'un mouvement rectiligne vertical ascendant :

- uniformément accéléré d'accélération $a_a = 2{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ pendant une durée $t_a = 3{,}0\,\mathrm{s}$;
- uniforme pendant une durée $t_u = 7\,\mathrm{s}$;
- uniformément décéléré d'accélération de norme $a_d = 1{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ pendant une durée t_d jusqu'à l'arrêt.

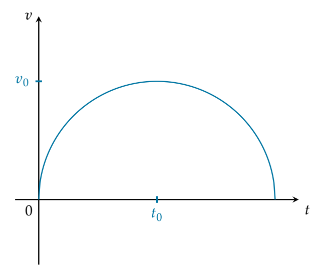
1. Tracer la courbe représentant la vitesse en fonction du temps et en déduire la durée t_d. Y lire graphiquement la distance totale parcourue.
2. Tracer la courbe représentant l'accélération en fonction du temps. Comment peut-on y vérifier que l'ascenseur s'est bien arrêté ?
3. Tracer l'allure de la courbe représentant la position en fonction du temps.

Exercice 4 : Quand on a oublié ses clefs

1. Un·e conduct·eur·rice démarre avec accélération constante a en ligne droite puis se rend compte au bout d'un temps t_1 qu'il·elle a oublié ses clefs… Il·elle décélère alors avec une accélération de même norme.
   (a) Quelle durée le véhicule met-il à s'arrêter ? Tracer la courbe représentative de la vitesse.
   (b) En déduire l'expression de la position en fonction du temps. Tracer également la courbe représentative.
   (c) Déterminer la distance totale parcourue avant l'arrêt. Proposer une lecture graphique de cette distance.
2. L'évolution de la vitesse du même véhicule est maintenant donnée par l'ellipse ci-contre de forme générale :

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_0}\right)^2 = 1$$

   (a) Vérifier l'expression donnée en des points bien choisis de la courbe. Déterminer l'expression de v, en fonction du temps.
   (b) Déterminer de même la distance totale parcourue avant l'arrêt.



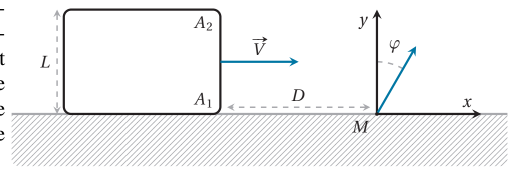
Exercice 5 : Distance de sécurité

En arrivant sur une zone d'accident, chaque voiture diminue instantanément sa vitesse de v_1 à v_2. Chaque voiture mesure la même longueur l. Quelle doit être la distance entre les voitures pour éviter une collision. Calculer pour $v_1 = 130\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_2 = 90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ et $l = 4\,\mathrm{m}$.

Exercice 6 : Accident ?

On considère une voiture modélisée par un parallélépipède de largeur L en mouvement rectiligne uniforme le long d'un trottoir rectiligne Ox.

Un·e piéton·ne, modélisé par un point M, commence à traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance D. Le mouvement du point M est rectiligne uniforme à une vitesse de norme v. On peut choisir l'angle φ que forme son vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ avec l'axe Oy, qui reste compris entre 0 et $\pi/2$.



1. On choisit l'origine des coordonnées cartésiennes au point de départ de M. Déterminer les coordonnées x et y des points A_2 et M en fonction du temps.

2. En déduire, pour un angle φ donné :

   - l'instant t_x où les abscisses de M et A_2 sont égales ;
   - l'instant t_y où les ordonnées de M et A_2 sont égales.

   En déduire la vitesse minimale $v_{\min}(\varphi)$ permettant à M d'éviter la voiture quand il se déplace dans la direction donnée par φ.

3. (a) En déduire la vitesse minimale v_0 que doit posséder la personne pour éviter la voiture en choisissant le meilleur angle. On pourra dériver l'expression de $v_{\min}(\varphi)$ en fonction de φ ou mettre l'expression de $v_{\min}(\varphi)$ sous la forme $v_{\min} = \frac{KV}{\cos(\varphi-\delta)}$ où les constantes K et δ dépendent des distances D et L.

   (b) Déterminer les expressions de v_0 pour $D \gg L$ et $L \gg D$, ainsi que les valeurs de l'angle φ optimal correspondant. Commenter.

Exercice 7 : Basket-ball

On précise les caractéristiques de la trajectoire d'un objet en mouvement uniformément accéléré. On prend un vecteur accélération $\vec{a} = -g\vec{e_z}$, avec g une constante positive. Ces trajectoires sont caractéristiques des mouvements dans le champ de pesanteur, en l'absence de frottement.

1. Quel est le système de coordonnées approprié ?

2. L'objet se trouve à l'instant initial à la position $x = 0, z = h$ et est animé à cet instant du vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,(\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_z})$, avec $\alpha \in [0°;90°]$. Établir l'équation de sa trajectoire.

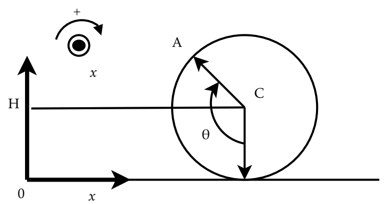
3. (a) Déterminer l'abscisse x_C pour laquelle $z = 0$ ainsi que l'altitude maximale atteinte z_S.

   (b) Comment z_S varie-t-elle avec l'angle α quand v_0 reste fixé ? Avec h ?

   (c) Dans le cas $h = 0$, pour quelle valeur de α la distance x_C est-elle maximale ?

   (d) Pour un lancer au basket-ball (vitesse v_0 de l'ordre de $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) la taille du joueur ou de la joueuse influe-t-elle beaucoup sur x_C ? On considérera que le lancer est effectué dans les conditions de la question précédente.

Exercice 8 : Cycloïde



Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe Ox. Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle $\theta(t)$ dont on a tourné un rayon de la roue à partir de sa position initiale.

1. Montrer que si la roue ne glisse pas, l'abscisse du centre de la roue x_C est liée à θ par : $x_c = x_{c_0} + R\theta$.

2. Quelles sont en fonction de R et θ les coordonnées (dans le repère cartésien d'origine O) du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait pour $\theta = 0$ avec O ? L'ensemble de ces points constitue par définition une *cycloïde*. Tracer cette courbe.

3. Calculer en fonction de R et de θ et ses dérivées, les composantes de la vitesse et de l'accélération de M.

4. Donner les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de M au moment où celui-ci touche l'axe.

Exercice 9 : Espace des phases

On considère un point animé M d'un mouvement unidimensionnel uniformément accéléré dans un référentiel $\mathscr{R}$. On note $\vec{a}$ l'accélération constante de M.

1. Choisir soigneusement le repère le plus adapté pour y décrire le mouvement de M.

2. On désigne par x_0 et v_0 respectivement la position et la vitesse initiales de M. Établir la trajectoire de M dans l'espace des phases. On distinguera différents cas selon les signes respectifs de x_0 et v_0.

Exercice 10 : Le chien

On considère deux demi-droites perpendiculaires (Ox) et (Oy). À l'instant $t = 0$, une femme part de O et parcourt l'axe (Oy) avec la vitesse constante v. Au même instant, son chien part d'un point A de l'axe (Ox), situé à la distance a de O, et se dirige constamment vers sa maîtresse en courant à la vitesse $2v$.

1. Déterminer la direction du vecteur vitesse du chien en fonction des coordonnées (x, y) du chien et de sa maîtresse (x_M, y_M), puis en fonction des coordonnées (x, y) du chien et du temps.

2. Montrer que l'équation différentielle de la trajectoire du chien est :$1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4x^2\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2$.

3. Vérifier que cette équation admet pour solution des fonctions de la forme $y = \alpha x^{3/2}/3 - \sqrt{x}/\alpha + \beta$ où α et β sont des constantes qu'on déterminera.

4. À quel instant le chien rejoint-il son maître ?

5. Déterminer, de deux façons différentes, la longueur de la trajectoire parcourue par le chien.

Coordonnées polaires

Exercice 11 : Calcul

Déterminer les composantes, dans la base cylindrique, des vecteurs vitesse et accélération d'un mouvement dont les coordonnées sont :

$$r = a_0 t^2 + r_0 \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t \quad z(t) = v_0 t.$$

Déterminer également les expressions de leurs normes.

Exercice 12 : Mouvement d'un point sur une spirale logarithmique

Un point M décrit la courbe d'équation polaire suivante : $(r = be^{-t/\tau}; \theta = \omega t)$ avec τ, ω des constantes positives. Tracer l'allure de sa trajectoire.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire. Comparer la distance à l'origine O du point M quand il est en θ_0 et à l'issue d'une révolution supplémentaire autour de O.

2. Déterminer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération du point M.

3. En déduire les normes de ces vecteurs ainsi que l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Exercice 13 : Mouvement circulaire

Un point est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O. On décrit son mouvement en coordonnées polaires de centre O. Il se trouve en $\theta = 0$ à l'instant initial.

1. Rappeler l'expression des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires pour une trajectoire circulaire.

2. Donner l'expression de $\theta(t)$ si le mouvement s'effectue avec une vitesse de norme v_0 constante et s'il s'effectue avec une norme croissant linéairement en fonction du temps : $v = kt$ avec k une constante positive.

3. En déduire dans ce dernier cas :

   (a) l'expression du vecteur accélération et sa norme en fonction du temps,

   (b) l'expression de la distance D parcourue en fonction du temps.

4. Le rayon du cercle est $R = 2{,}0\,\mathrm{m}$ et la norme v croît de $1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ toutes les $5\,\mathrm{s}$. Combien de tours le point aura-t-il effectués quand le module de son accélération atteindra $a = 3g$, avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$?

Exercice 14 : Conjonction de planètes

Deux planètes assimilées à des points M_A et M_B décrivent des orbites circulaires de même centre O dans un même plan, en tournant dans le même sens. Leurs mouvements sont circulaires uniformes, de périodes respectives T_A et T_B.

1. Déterminer la durée séparant deux conjonctions de M_A et M_B, définies par l'alignement des points O, M_A et M_B, dans cet ordre.

2. Calculer cette durée pour Vénus et la Terre, de périodes respectives $T_V = 225\,\mathrm{jours}$ et $T_T = 365\,\mathrm{jours}$.

Exercice 15 : Carrousel

On considère un carrousel circulaire de rayon R en rotation autour de son centre O à la vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$. Un homme assimilé à un point se déplace à sa surface à la vitesse v constante.

1. (a) L'homme se déplace en suivant un rayon du cercle (Figure 1a). Il se trouve à l'instant initial en O et se dirige dans la direction $\theta = 0$. Déterminer ses coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$ dans le référentiel $\mathscr{R}$.

   (b) Même question si l'homme se déplace à la vitesse v constante le long d'un cercle de rayon r_0 de centre O, dans le même sens que la rotation du carrousel (Figure 1b), avec $\theta = 0$ à l'instant initial.

2. Déterminer dans les deux cas précédents le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans $\mathscr{R}$ de l'homme.

3. Déterminer, dans les deux cas précédents la valeur maximale du rayon R pour laquelle la norme de l'accélération reste inférieure à $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ si $v = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\omega = (2\pi/5)\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

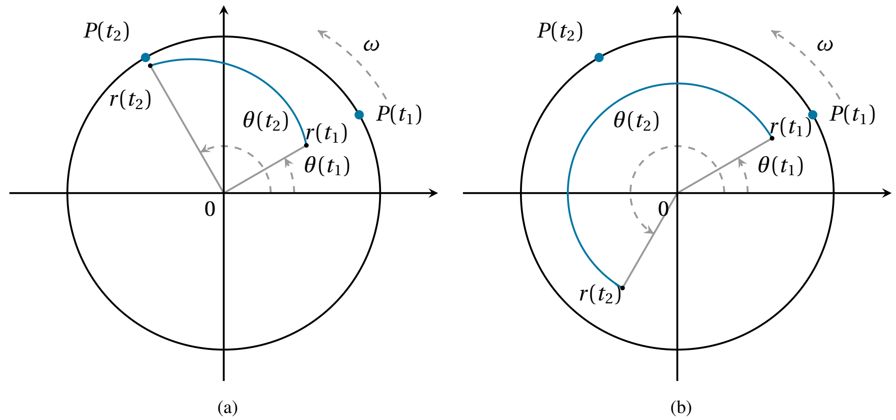


Fig. 1 : Trajectoires de l'homme entre les instants t_1 et t_2. Le point P est un point fixe du carrousel.

Exercice 16 : Bretelle d'accès

On cherche à relier deux portions de trajectoire coplanaires :

- l'une rectiligne
- l'autre circulaire de rayon R

Un véhicule parcourt la trajectoire à vitesse constante v.

1. Déterminer le vecteur accélération du véhicule quand il est sur la portion rectiligne et quand il est sur l'arc de cercle. Représenter les vecteurs sur un schéma. Quel inconvénient présente cette solution pour le confort des passagers et pour l'état du véhicule ?

2. On cherche, pour relier ces deux portions, une courbe sur laquelle la courbure γ croît proportionnellement avec le temps au cours du mouvement : $\gamma = \alpha t$ avec α une constante positive.

   (a) Établir la relation entre la courbe γ et l'abscisse curviligne s en fonction de α et v. Tracer une allure approximative de la courbe.

   (b) On propose une courbe paramétrée par le réel θ définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$x = \ell \int_{\theta=0}^{\theta} \cos\left(\theta^2\right)\mathrm{d}\theta \qquad y = \ell \int_{\theta=0}^{\theta} \sin\left(\theta^2\right)\mathrm{d}\theta$$

   On admet de plus que pour une courbe paramétrée, la courbure au point de paramètre θ a pour expression :

$$\gamma(\theta) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\theta^2}}{\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Autres thèmes

Déterminer l'expression de θ en fonction de t quand la courbe est parcourue à la vitesse v.

(c) Vérifier que la courbure γ est bien proportionnelle à l'abscisse curviligne s le long de la courbe proposée.

(d) Le véhicule se déplace à $v = 130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ et on souhaite rejoindre une portion circulaire sur laquelle l'accélération aura pour norme $a = g/2$ en un temps de $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$. Calculer la valeur du paramètre ℓ.

Exercice 17 : Godille en ski

Un·e skieu·r·se parcourt une trajectoire sinusoïdale plane donnée par l'équation :

$$y = a\cos(kx),$$

avec $a = 5\,\mathrm{m}$ et k deux constantes positives.

1. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que la distance entre deux virages à gauche soit $N = 15$ fois l'amplitude selon y. Calculer numériquement (utiliser python ou Wolfram alpha) la longueur de l'arc d'une période de la courbe.

2. On peut montrer que la courbure γ a pour expression :

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left(1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

   La trajectoire est parcourue à la vitesse $v = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ constante. Déterminer les valeurs minimale et maximale des accélérations normale et tangentielle. Tracer l'allure des variations de ces accélérations en fonction du temps sur un même graphique en précisant les valeurs numériques pertinentes pour l'échelle de temps. Comment ces courbes sont-elles modifiées pour $v = 100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$?

Exercice 18 : Coordonnées sphériques

On étudie le mouvement d'un avion se déplaçant à faible altitude autour de la Terre. On peut alors considérer qu'il évolue à la surface d'une sphère de rayon R_T. Sa position y est repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques.

1. Son vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport à la Terre est de norme constante.

   (a) Il se déplace du nord vers le sud. Déterminer l'évolution de ses coordonnées sphériques θ et φ.

   (b) Même question s'il se déplace sur un cercle de latitude θ constante, d'est en ouest.

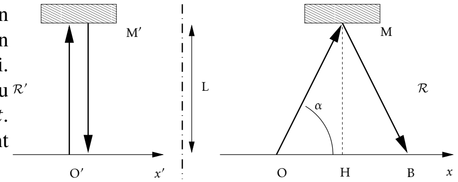
2. Il se déplace maintenant du nord vers le sud et d'est en ouest en gardant toujours le même angle α par rapport à l'axe nord-sud. Comment doit-il ajuster la norme v de son vecteur vitesse en fonction de sa position pour toujours garder le Soleil au zénith ?

Exercice 19 : Bon courage

Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques.

Exercice 20 : Dilatation du temps en mécanique relativiste

On illustre dans cet exercice une conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière postulée par la relativité restreinte : la dilatation du temps dans un référentiel en mouvement.



On considère deux observateurs, un chef de gare immobile sur son quai et une contrôleuse, immobile dans un train se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V par rapport au quai. Dans tout l'exercice on distinguera la temps dans le référentiel du train $\mathscr{R}'$, noté t' de celui dans le référentiel ($\mathscr{R}$) du quai, noté t. On supposera que les référentiels liés à la gare et au train sont bien galiléens.

À l'instant initial $t' = 0$, la contrôleuse envoie une impulsion lumineuse (faisceau laser par exemple) verticalement vers un miroir situé à une distance D. Cet instant est également choisi comme l'instant $t = 0$ dans $\mathscr{R}$. À cet instant, la contrôleuse est en O', le chef de gare en O et $O = O'$.

1. On raisonne tout d'abord dans le référentiel $\mathscr{R}'$. En admettant que la lumière s'y propage à c, quel est le temps T' mis par la lumière pour atteindre le miroir et revenir à la contrôleuse.

2. On admet que conformément à la théorie de la relativité restreinte, la lumière se propage également à c dans le référentiel $\mathscr{R}'$. Compte-tenu du déplacement de M dans $\mathscr{R}$ durant la propagation lumineuse, son trajet y est triangulaire.

   (a) Établir la relation entre l'angle α (fait par la direction du faisceau lumineux avec l'horizontale dans $\mathscr{R}$), c, L et le temps T mis par la lumière pour revenir à la contrôleuse dans $\mathscr{R}$.

   (b) Établir une autre relation entre α, V et c. En déduire T.

3. En conclure que l'invariance de la vitesse de la lumière dans les deux référentiels implique qu'on a $T = \gamma T'$, avec $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$. Justifier alors le terme de « dilatation des durées » entre $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$.

Correction de l'exercice 1

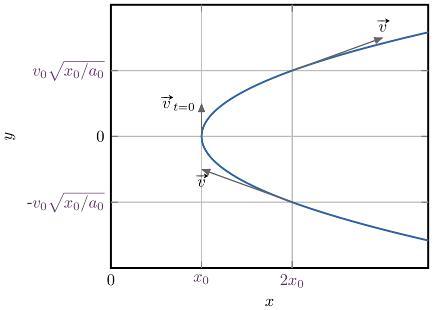
1. On a immédiatement :

$$\begin{aligned} &\dot{x} = 2a_0 t && \dot{y} = v_0 && \dot{z} = 0 \\ &\ddot{x} = 2a_0 && \ddot{y} = 0 && \ddot{z} = 0 \\ &v = \sqrt{(4a_0^2 t^2 + v_0^2)} && a = 2|a_0| \end{aligned}$$

2. On calcule :

$$t = \frac{y}{v_0} \rightarrow x = x_0 + a_0\left(\frac{y}{v_0}\right)^2,$$

équation d'une parabole de sommet $(x = x_0; y = 0)$ et d'axe de symétrie $(y = 0)$.



3. On calcule :

$$x = 2x_0 \quad \text{pour : } t = \pm sqrt\frac{x_0}{a_0} \quad iey = \pm v_0\sqrt{\frac{x_0}{a_0}}.$$

En ces points le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = \pm 2\sqrt{x_0 a_0}\vec{e_x} + v_0\vec{e_y}.$$

Correction de l'exercice 2

Par définition, on a $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. À chaque instant on a donc, par intégration :

$$v(t) - v(t=0) = \int_{t=0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t.$$

On intègre ensuite les expressions de $a(t)$, linéaires par morceaux. On peut également lire graphiquement la variation de la vitesse comme l'aire sous la courbe : il suffit ici de la découper en triangles et rectangles. On obtient :

$$v(t_2) = v(t_1) + \frac{2\,\mathrm{s} \times 2 \times 6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}/3}{2} = 7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad v(t_3) = v(t_1) + 7\,\mathrm{s} \times 6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 45\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

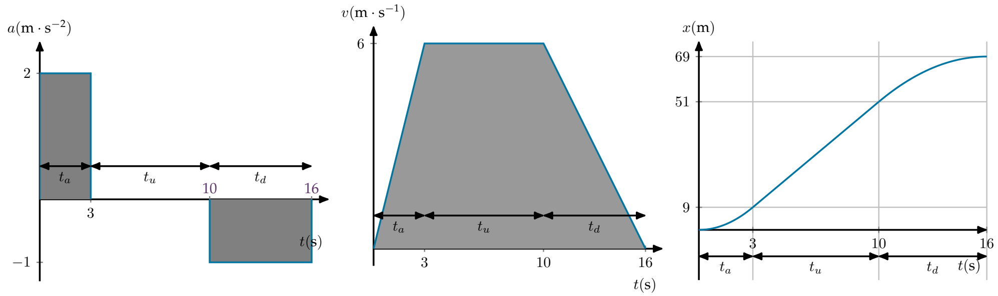
Correction de l'exercice 3

Les courbes sont représentées sur la Figure 2.

1. La vitesse croît linéairement avec le temps pendant la durée t_a, puis reste constante pendant t_u et décroît linéairement avec une pente deux fois plus faible pendant t_d. La durée t_d doit donc être deux fois plus grande que t_a. La longueur totale parcourue est l'aire sous la courbe puisqu'en notant x la position à l'instant t, on a $x(t) - x(0) = x(t) = \int_{\tau=0}^{t} v\,\mathrm{d}\tau$.

2. La courbe de l'accélération se compose de trois portions constantes. De la même manière que précédemment, on a $v(t) - v(0) = v(t) = \int_{\tau=0}^{t} a\,\mathrm{d}\tau$. La vitesse est donc l'aire entre la courbe de l'accélération et l'axe des abscisses, comptée positivement si la courbe est au dessus de l'axe et négativement sinon. Elle est bien nulle à la fin du mouvement puisque les aires au dessus et en dessous de l'axe sont égales.

3. On a $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = $ cste sur la portion d'accélération nulle et $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = $ cste sur les portions à accélération constante. La courbe de la position en fonction du temps se compose donc d'une portion de parabole tournée vers le haut, d'une portion rectiligne et d'une portion de parabole tournée vers le bas. Ces courbes doivent se raccorder continûment et être partout dérivables puisque la position et la vitesse sont continues.



(a) Accélération. (b) Vitesse. (c) Position.

Fig. 2 : .

Correction de l'exercice 4

Notons x l'axe du mouvement.

1. (a) La vitesse évolue selon :

$$\begin{cases} t \leqslant t_1 : & v_x = at \\ t \geqslant t_1 : & v_x - at_1 = -a(t - t_1) \rightarrow v_x = 2at_1 - at. \end{cases}$$

Elle s'annule donc pour $t = 2t_1$ (représentée sur la figure 3a).

(b) On l'obtient par intégration :

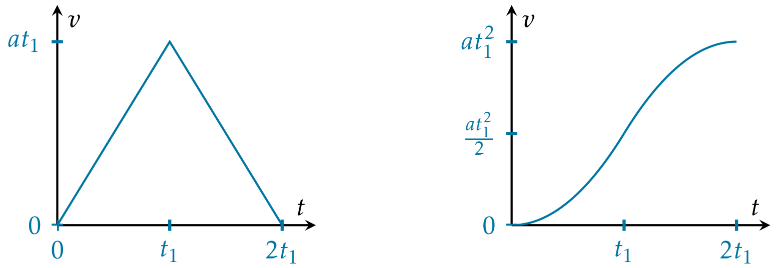
$$\begin{cases} t \leqslant t_1 : & x(t) - 0 & = \int_{t=0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t} at\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 \\ t \geqslant t_1 : & x(t) - x(t_1) & = \int_{t=t_1}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=t_1}^{t} 2at_1\,\mathrm{d}t - at\,\mathrm{d}t = 2at_1(t - t_1) - \frac{1}{2}a(t^2 - t_1^2) \\ x(t) & & = -at_1^2 + 2at_1 t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

représenté sur la figure 3b. On vérifie qu'elle est bien continue et dérivable puisque v_x est continue.

(c) La distance totale parcourue est $x(2t_1) = at_1^2$. On a de plus :

$$\mathrm{d}x = v_x\,\mathrm{d} \to x(2t_1) = \int_{x=0}^{x(2t_1)} \mathrm{d}x = \int_{t=0}^{2t_1} v_x\,\mathrm{d}t.$$

C'est donc l'aire sous la courbe de $v_x(t)$, ce qu'on vérifie puisque l'aire sous ce triangle de base $2t_1$ et de hauteur at_1 est at_1.



(a) Évolution de la vitesse.

(b) Évolution de la position.

Fig. 3

2. (a) On vérifie que l'égalité :

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^2 = 1$$

est vérifiée aux points : $v = 0, t = 0$, $v = 0, t = 2t_1$, $v = v_0, t = t_0$. Les grandeurs v_0 et t_0 représentent les demi-axes de l'ellipse, analogues du rayon d'un cercle quand ils sont égaux. Comme v est toujours positif, on a :

$$v = v_0\sqrt{1-\left(\frac{t}{t_0}-1\right)^2}.$$

(b) On en déduit, par intégration :

$$x(t) - 0 = \int_{t=0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t = v_0\int_{t=0}^{t}\sqrt{1-\left(\frac{t}{t_0}-1\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue un changement de variable en posant, $t/t_0 - 1 = \sin(u)$. On a $\mathrm{d}t = t_0\cos(u)\,\mathrm{d}u$ et $u \in [-\pi/2;\pi/2]$ pour $t \in [0;2t_0]$. On calcule $\sqrt{1-\sin(u)^2} = |cos(u)| = \cos(u)$ puisque $\cos(u) \geqslant 0$ sur cet intervalle, d'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0\int_{u=-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin(u)^2}\,\mathrm{d}t = v_0t_0\int_{u=-\pi/2}^{\pi/2}\cos(u)^2\,\mathrm{d}u = v_0t_0\int_{u=-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{v_0t_0}{2}\left(\pi + [\sin(2u)/2]_{u=-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \frac{\pi v_0 t_0}{2}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, cette grandeur représente l'aire sous la courbe de$v(t)$. On aurait pu obtenir ce résultat directement en utilisant l'aire de l'ellipse, de demi-axes v_0 et t_0, égale à $\pi v_0 t_0$ comme on vient de l'établir. On peut facilement retenir ce résultat en le rapprochant de l'aire d'un disque de rayon, égale à πR^2 et en interprétant une ellipse comme un cercle de «rayons» différents selon les deux axes, égaux aux demi-axes.

Correction de l'exercice 5

Choisissons comme origine des temps, l'instant où la première voiture atteint la zone d'accident et comme origine des abscisses le début de cette zone. En notant $x_1(t)$ son abscisse, on a immédiatement $x_1(t) = v_2 t$.

Posons D la distance entre les deux voitures avant la zone d'accident. La première voiture se trouve quant à elle à $t = 0$ en $x_2 = -(D+l)$ et elle parvient à l'instant $(D+l)/v_1$ à la zone d'accident. L'accident sera évité si la première voiture est entièrement engagée dans la zone d'accident à cet instant, où elle a parcouru $v_2(D+l)/v_1$, soit si $l < v_2(D+l)/v_1$, *ie* $D > (v_1/v_2 - 1)l = 1{,}8\,\mathrm{m}$.

Correction de l'exercice 6

1. On décompose la vitesse du point M selon :

$$\vec{v}(M) = v\left(\cos(\varphi)\,\vec{e_y} + \sin(\varphi)\,\vec{e_x}\right).$$

On obtient son vecteur position en intégrant entre l'instant initial $t = 0$ où $M = O$ et un instant ultérieur, avec $v = $ cste :

$$\overrightarrow{OM}(t) - \vec{0} = \int_{t=0}^{t}\vec{v}(M)\,\mathrm{d}\tau = v\left(\cos(\varphi)\,\tau\vec{e_y} + \sin(\varphi)\,\tau\vec{e_x}\right),$$

soit :

$$y_M(t) = v\cos(\varphi)\,t \qquad \text{et :} \qquad x_M(t) = v\sin(\varphi)\,t.$$

2. On obtient de la même manière :

$$\vec{v}(A_2) = V\vec{e_x} \quad \text{soit :} \quad \overrightarrow{A_2(0)A_2(t)} = V\,t\,\vec{e_x} \quad \text{et donc :} \begin{cases} x_{A_2}(t) &= -D + Vt \\ y_{A_2}(t) &= L \end{cases}.$$

On en déduit :

- $x_M = x_{A_2}$ pour $t_x = \frac{D}{V - v\sin(\varphi)}$;
- $y_M = y_{A_2}$ pour $t_y = \frac{L}{v\cos(\varphi)}$.

On remarque que t_x diverge pour $V = v\sin(\varphi)$: la personne ne sera jamais rattrapée par la voiture s'ils ont la même vitesse selon Ox. De même t_y diverge pour $\varphi = \pi/2$: le piéton reste alors sur l'axe Ox.

L'individu peut éviter la voiture s'il atteint $y = L$ avant que la voiture ne l'ait rejoint, soit pour $t_x > t_y$, c'est-à-dire :

$$\frac{D}{V - v\sin(\varphi)} > \frac{L}{v\cos(\varphi)}.$$

La vitesse limite $v_{\min}(\varphi)$ vérifie donc :

$$t_x = t_y \quad \text{soit :} \quad v_{\min}(\varphi) = \frac{VL}{D\cos(\varphi) + L\sin(\varphi)}.$$

3. (a) On peut déterminer l'angle φ minimisant $v_{\min}(\varphi)$ en cherchant à annuler la dérivée de $v_{\min}(\varphi)$. Il est cependant plus léger d'utiliser la représentation de Fresnel pour transformer l'expression $D\cos(\varphi)+L\sin(\varphi)$. On peut en effet l'écrire :

$$D\cos(\varphi)+L\sin(\varphi) = D\cos(\varphi)+L\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

En représentation de Fresnel, on forme donc le vecteur comme somme de deux vecteurs orthogonaux. Sa norme est donc $\sqrt{D^2+L^2}$ et sa phase peut s'écrire $\varphi-\delta$, avec $\tan\delta = L/D$. On a finalement :

$$D\cos(\varphi)+L\sin(\varphi) = \sqrt{D^2+L^2}\cos(\varphi-\delta) \quad \text{soit : } v_{\min}(\varphi) = \frac{VL}{\sqrt{D^2+L^2}\cos(\varphi-\delta)}.$$

Cette expression est minimale pour $\varphi=\delta$ où la valeur absolue du cosinus est maximale. Son minimum est :

$$v_0 = v_{\min}(\varphi=\delta) = \frac{VL}{\sqrt{D^2+L^2}}.$$

(b) Pour $D \gg L$ (qui est le cas le plus fréquent lors de la traversée d'un passage piéton), on a $\tan(\delta) \ll 1$, l'angle δ, et donc φ, sont alors très petits devant 1 : le piéton doit traverser selon Oy. Par ailleurs, on a alors $v_0 \simeq VL/D$. Le rapport des vitesses de M et de la voiture doit être supérieur au rapport des distances L/D.
Pour $L \gg D$, on a au contraire $\tan(\delta) \gg 1$ et donc $\varphi=\delta$ très proche de $\pi/2$: l'individu doit courir selon Ox si la voiture est très proche. On a alors $v_0 \simeq V$: il doit courir plus vite que la voiture ne roule pour l'éviter.

Correction de l'exercice 7

1. Le système possède une direction privilégiée, la direction du vecteur $\overrightarrow{a}$. On choisit donc les coordonnées cartésiennes.

2. On intègre deux fois par rapport au temps l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -g\overrightarrow{e_z}$ pour obtenir : $x = v_0 t\cos(\alpha)$ et $z = h + v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}$.
Il reste à « faire disparaître » le paramètre t pour obtenir la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0\cos(\alpha)} \quad \text{soit : } \quad z-h = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2.$$

3. (a) On résout tout d'abord l'équation $z=0$. On a donc :

$$-h = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 \quad \text{soit : } 0 = x^2 - \frac{2v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}x - \frac{2hv_0^2\cos(\alpha)^2}{g}.$$

L'unique racine positive de cette équation du second degré, qu'on notera x_C est :

$$x_C = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)^2 + \frac{2gh}{v_0^2}\cos^2(\alpha)}\right)$$

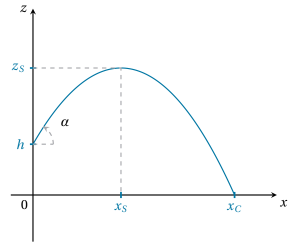
Pour établir l'altitude maximale, il est fructueux de transformer l'expression de la trajectoire pour y lire directement ses caractéristiques. En faisant apparaître le développement du carré d'une somme, on a en effet :

$$\begin{aligned} z-h = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}\left(x^2 - \frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}{g}x\right) \\ &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}\left[x-\frac{v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}\right]^2 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \quad z-\left(h+\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}\right) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}\left[x-\frac{v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}\right]^2.$$

Cette expression est de la forme :

$$z_S - z = \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}(x-x_S)^2,$$



avec x_S et z_S les coordonnées du sommet de la parabole. L'altitude maximale sera donc $z_S = h + \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}$, atteinte pour $x_S = \frac{v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}$.

(b) L'altitude z_S est évidemment maximale pour une trajectoire verticale, c'est-à-dire avec $\alpha=\pi/2$. On a alors $z_S = h+\frac{v_0^2}{2g}$. Quel que soit l'angle α, l'altitude $z_S$croît linéairement avec h.

(c) Pour $h=0$, on a $x_C = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$, maximale pour $2\alpha = \pi/2$, soit $\alpha=\pi/4$ où elle vaut $x_C = \frac{v_0^2}{g}$.

(d) Pour $\alpha = \pi/4$ on a, pour h non nul :

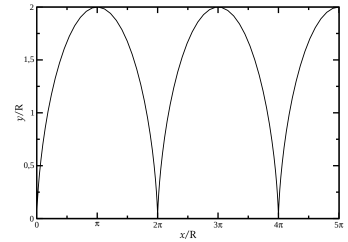
$$x_C = \frac{v_0^2}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{4gh}{v_0^2}}\right).$$

Prenons pour h la hauteur de la main au moment du lancer. Pour $h \simeq 2\,\mathrm{m}$, le terme sans dimension $4gh/v_0^2$ n'est pas très grand devant 1 et on a $\left(1+\sqrt{1+4gh/v_0^2}\right)/2 = 1{,}17$. Un lancer de $h = 2\,\mathrm{m}$ par rapport à un lancer du sol ne fait gagner que 16% à la portée du tir.
De plus l'expression de x_C est bien croissante avec h mais elle croît lentement puisqu'elle comporte une fonction racine. Pour un lancer avec $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$, on aura encore $\left(1+\sqrt{1+4gh/v_0^2}\right)/2 = 1{,}13$: les 0,5 m d'un·e joueu·r·se à $h = 2\,\mathrm{m}$ ne lui font gagner que 3%.

Correction de l'exercice 8

1. Si la roue ne glisse pas, son centre avance à chaque tour d'une longueur égale à son périmètre, soit $2\pi R$. Comme la roue a alors tourné de $\theta = 2\pi$, on a $x_c = x_{c_0} + R\theta$. Le choix d'origine du repère assure ici que $x_{c_0} = 0$.

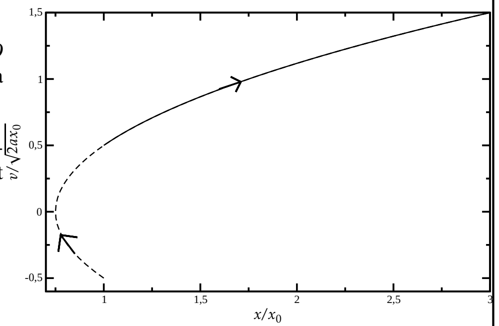
2. On a $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CA}$ avec H le projeté orthogonal de C sur l'axe Oy. Comme $\overrightarrow{CA} = R\left[-\sin\theta\overrightarrow{e_x} - \cos\theta\overrightarrow{e_y}\right]$, $\overrightarrow{HC} = x_C\,\overrightarrow{e}_x = R\theta$ et $\overrightarrow{OH} = R\,\overrightarrow{e}_y$, on obtient :
$$\overrightarrow{OA} = R\left[(1-\cos\theta)\overrightarrow{e_y} + (\theta - \sin\theta)\overrightarrow{e_x}\right].$$



3. On en déduit les expressions de la vitesse et de l'accélération dans le référentiel $\mathscr{R}$ dans lequel $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont fixes :
$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{e_y} + R\dot{\theta}\,(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{e_x}$$
$$\text{et}\quad \overrightarrow{a} = R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\overrightarrow{e_y} + R\left[\ddot{\theta}(1-\cos\theta) + \dot{\theta}^2\sin\theta\right]\overrightarrow{e}_x$$

4. Quand le point A repasse en $\theta = 0[2\pi]$, c'est-à-dire au contact avec le sol, on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a} = R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_y}$. La vitesse coïncide alors avec la vitesse du point du sol coïncident à l'instant du contact : on dit qu'il y a «roulement sans glissement».

Correction de l'exercice 9



1. On choisit évidemment le repère cartésien d'origine O dont l'un des axes, Ox par exemple, coïncide avec la direction de $\overrightarrow{a}$. On aura donc $\overrightarrow{a} = a\,\overrightarrow{e}_x$.

2. L'équation du mouvement de M s'écrit immédiatement : $v(t) = v_0 + at$ et $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, soit la trajectoire dans l'espace des phases :
$$x - \left(x_0 - \frac{v_0^2}{2a}\right) = \frac{v^2}{2a},$$

parabole de sommet $x = (x_0 - \frac{v_0^2}{2a}, v = 0)$. On représente sur la figure ci-contre $v/\sqrt{2ax_0}$ en fonction de x/x_0 pour $v_0/\sqrt{2ax_0} = \frac{1}{2}$ (courbe en traits continus) et $v_0/\sqrt{2ax_0} = -\frac{1}{2}$ (courbe en traits interrompus). Bien évidemment, les deux trajectoires se confondent pour $t \to \infty$.

Correction de l'exercice 10

1. Le chien, situé à l'instant t en $x(t), y(t)$ se dirige toujours vers son maître situé, au même instant en $0, vt$. Un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire du chien est donc $(1, dy/dx)$, avec $dy/dx = (vt - y)(-x)$.

2. On calcule alors la norme de la vitesse du chien : $2v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\dot{x}|\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$. On dérive l'équation $-x\,dy/dx = vt - y$ par rapport au temps pour obtenir : $-\dot{x}dy/dx - x\dot{x}d^2y/dx^2 = v - \dot{x}dy/dx$, soit $x\dot{x}d^2y/dx^2 = -v$. En reportant cette expression dans l'expression du module au carré de la vitesse, on obtient :
$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4x^2\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2.$$

3. On vérifie que les solutions proposées sont solutions. Comme les conditions initiales du mouvement sont $x(0) = a$; $y(0) = 0$ et $dy/dx(0) = 0$, on obtient $\alpha = 1/\sqrt{a}$ et $\beta = 2a/3$.

4. Quand le chien rejoint sa maîtresse, on a $x = 0$ et donc $y = \beta = 2a/3$. Il faut vérifier à quel instant t_f le chien atteint la droite $x = 0$. Pour cela, on introduit dans l'équation donnant $\dot{x}$ l'expression de d^2y/dx^2. On obtient : $\frac{dx}{dt} = -v/\left[\alpha\sqrt{x}/4 + 1/(4\alpha\sqrt{x})\right]$. On intègre alors selon :
$$\int_{x=a}^{x=0} \alpha\sqrt{x}/4 + \frac{1}{4\alpha\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -\int_{t=0}^{t_f} v\mathrm{d}t \to \alpha/6a^{3/2} + \sqrt{a}/(2\alpha) = vt_f \to 2a/3 = vt_f.$$
Or à $t = 2a/3$, la maîtresse se trouve en $2a/3$ qui est bien la position du chien : ils se sont bien rejoints.

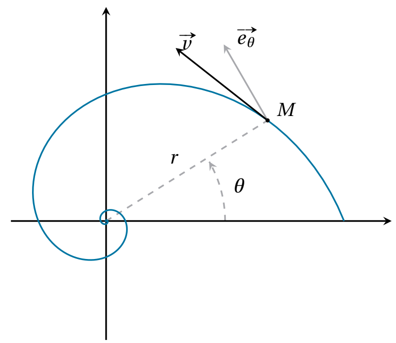
5. Le chien court à $2v$, il a donc parcouru $2vt_f$ avant qu'ils se rejoignent. On peut le vérifier en calculant
$$l = \int_{x=a}^{x=0}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x=a}^{x=0} -dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \int_{x=0}^{x=a} 2x\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x=0}^{x=a}\left(\sqrt{x/a} + \sqrt{a/x}\right)/2 = 4a/3.$$

Correction de l'exercice 11

On a :
$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} = 2a_0t\overrightarrow{e_r} + (a_0t^2 + r_0)\omega\overrightarrow{e_\theta} + v_0\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} = \left(2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2\right)\overrightarrow{e_r} + 4a_0t\omega\overrightarrow{e_\theta}$$

et :
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(2a_0t)^2 + \omega^2(a_0t^2 + r_0)^2 + v_0^2} \qquad \|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\left(2a_0 - (a_0t^2 + r_0)\omega^2\right)^2 + 16\omega^2a_0^2t^2}.$$

Correction de l'exercice 12



,

1. On élimine le paramètre t. On a $t = \theta/\omega$, soit $r = be^{-\theta/(\omega\tau)}$. Si le point est en $\left(r_0 = be^{-\theta_0/(\omega\tau)}; \theta_0 = \omega t_0\right)$ à l'instant t_0, il a accompli une révolution pour le premier instant tel que $\theta = \theta_0 + 2\pi$, soit $t = t_0 + 2\pi/\omega$. On a alors $r = r_0be^{-2\pi/(\omega\tau)}$, constant. Cette courbe porte le nom de spirale logarithmique, elle est représentée sur la Figure 12.

2. On obtient $v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}$ et $v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = b\omega e^{-t/\tau}$. On détermine également $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (1/\tau^2 - \omega^2)be^{-t/\tau}$ et $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{2b\omega}{\tau}e^{-t/\tau}$.

3. On calcule $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = b\sqrt{\omega^2 + 1/\tau^2}e^{-t/\tau}$ et $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = b\left(\omega^2 + 1/\tau^2\right)e^{-t/\tau}$. En notant α l'angle $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{v})$, on a $\cos(\alpha) = \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{OM}\right)/(vr) = -1/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$, on remarque en particulier qu'il ne dépend pas du point M.

Correction de l'exercice 13

1. On a $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

2. Si la norme de la vitesse est constante, on a : $\dot{\theta} = v_0/R$ et donc :

$$\theta(t) - \theta(0) = \theta(t) = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{v}{R}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{d}\tau = \frac{vt}{R}.$$

Si $v = kt$, on a $\dot{\theta} = kt/R$, soit :

$$\theta(t) - \theta(0) = \theta(t) = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{k}{R}\int_{\tau=0}^{t}\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{kt^2}{2R}.$$

3. (a) On a alors $\dot{\theta} = kt/R$ et $\ddot{\theta} = k/R$, soit :

$$\overrightarrow{a} = R\left(-\frac{k^2t^2}{R^2}\overrightarrow{e_r} + \frac{k}{R}\overrightarrow{e_\theta}\right) \qquad \text{soit : } a = k\sqrt{1 + \frac{k^2t^4}{R^2}}.$$

(b) La distance parcourue est $D(t) = R\theta = \frac{kt^2}{2}$.

4. On a dans ce cas $k = \frac{1}{5} = 2{,}0\cdot10^{-1}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Comme on ne recherche pas explicitement le temps, on le fait disparaître en remplaçant kt^2 par $2D$. On aura donc $a = 3g$ pour D tel que :

$$3g = k\sqrt{1 + \frac{4D^2}{R^2}} \quad \text{soit :} \quad D = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{9g^2}{k^2} - 1}.$$

Le nombre de tours est $D/(2\pi R) = 11{,}7$.

Correction de l'exercice 14

1. La vitesse angulaire sur chaque mouvement est $\omega = 2\pi/T$. La différence angulaire $\Delta\theta$ entre les directions des deux planètes varie donc avec le temps t comme $\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T}\right)t$. Les planètes sont en conjonction quand $\Delta\theta = 0 \mod 2\pi$. En choisissant une conjonction comme origine des temps, la suivante se produit pour $t = T_c$ tel que $2\pi\left(\frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T}\right)T_c = 2\pi$ soit : $T_c = \frac{T_T T_V}{T_T - T_V}$.

2. On calcule $T_c = 587\,\text{jour}$.

Correction de l'exercice 15

1. (a) On a immédiatement $r = vt$. L'homme met le même temps que le carrousel pour effectuer un tour complet autour de O sa vitesse angulaire est donc la même et on a $\theta = \omega t$ comme pour un point fixe du carrousel.

(b) On a cette fois-ci $r = r_0$. En un temps Δt, l'homme a tourné de $v\Delta t/r_0$ par rapport au rayon du carrousel sur lequel il se trouvait initialement, qui a lui-même tourné de ωt. Sa vitesse angulaire est donc $\omega + v/r_0$ et on a $\theta = (\omega + v/r_0)\,t$.

2. On a toujours : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}$.

- Dans le premier cas, on obtient :

$$\overrightarrow{v} = v\left(\overrightarrow{e_r} + \omega t\overrightarrow{e_\theta}\right) \qquad \overrightarrow{a} = v\omega\left(2\overrightarrow{e_\theta} - \omega t\overrightarrow{e_r}\right).$$

- Dans le deuxième, on a :

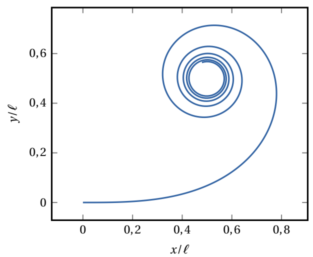
$$\overrightarrow{v} = (v + r_0\omega)\,\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a} = -r_0\left(\omega + \frac{v}{r_0}\right)^2\overrightarrow{e_r}.$$

3.
- Dans le premier cas, on exprime la norme a de $\overrightarrow{a}$ en fonction de r : $a = v\omega\sqrt{4 + (\omega t)^2} = v\omega\sqrt{4 + \left(\frac{r\omega}{v}\right)^2}$. Cette expression est croissante et maximale pour $r = R$, on résout alors $a = g$. On obtient $R = 6{,}0\,\mathrm{m}$.
- Dans le deuxième cas, on a directement $a = r_0\left(\omega + \frac{v}{r_0}\right)^2$. On résout $a = g$ pour $r_0 = R = 4{,}5\,\mathrm{m}$.

Correction de l'exercice 16

1. Sur la portion rectiligne, le vecteur accélération est nul car on est en mouvement rectiligne uniforme. Sur la portion circulaire, on a $\overrightarrow{a} = -(v^2/R)\overrightarrow{e_r}$ car le mouvement est circulaire uniforme. L'accélération est donc discontinue quand on passe d'une portion à l'autre, ce qui se traduit par une secousse (voir le cours de deuxième année sur les référentiels non galiléens) inconfortable pour les passagers et qui peut endommager le véhicule lui-même.

2. (a) Pour un mouvement uniforme, on a $s = vt$. Comme on souhaite avoir $\gamma = at$, on aura $s = v\gamma/a$. Au fur et à mesure de sa progression le rayon de courbure va diminuer et la courbe s'enrouler de plus en plus vite. L'allure de la courbe est représentée ci-contre pour un θ variant de 0 à $1{,}5\pi$.



(b) On a :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos(\theta^2) \qquad v_y = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin(\theta^2) \to v^2 = \left(\ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

On en déduit, $v = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ soit $\theta = vt/\ell$ puisque $v = \text{cste}$.

(c) On calcule la courbure θ avec la formule proposée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \ell\cos\left(\theta^2\right) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \ell\sin\left(\theta^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\theta^2} = -2\ell\theta\sin\left(\theta^2\right) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 2\ell\theta\cos\left(\theta^2\right)$$

$$\gamma = \frac{2\theta\left(\cos(\theta^2)^2 + \sin(\theta^2)^2\right)}{\ell\left(\cos(\theta^2)^2 + \sin(\theta^2)^2\right)^{3/2}} = \frac{2\theta}{\ell} = \frac{2s}{\ell^2}.$$

(d) Au bout de la durée Δt, on a parcouru $s = v\Delta t$ et la courbure sera donc $\gamma = 2s/\ell^2 = 2v\Delta t/\ell^2$. Sur la trajectoire circulaire, on aura $a = \gamma v^2 = g/2$, soit $\gamma = g/(2v^2)$. On calcule finalement :

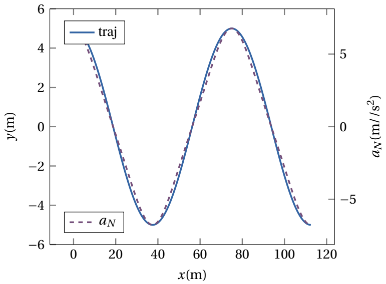
$$\frac{g}{2v^2} = \frac{2v\Delta t}{\ell^2} \to \ell = \sqrt{4v^3\Delta t/g} = 536\,\mathrm{m}.$$

Correction de l'exercice 17

1. La courbe a l'allure représentée ci-dessous.

   La période spatiale selon $\overrightarrow{e_x}$ est $2\pi/k$. On doit donc avoir :

$$k = \frac{2\pi}{15a} = 8{,}4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^{-1}.$$



   En coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire a pour norme, quand x est croissant :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (-ak\sin(kx))^2}$$

$$s = \int_{x=0}^{x=2\pi/k} \sqrt{1 + (-ak\sin(kx))^2}\,\mathrm{d}x$$

   Le code python suivant permet de calculer sa longueur :

```
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
def integrand(x,l,lamb):
return np.sqrt(1 + (2*np.pi*l/lamb)**2 *np.sin(2*np.pi*x/l)**2)

l = 5
lamb = 15*l
integrate.quad(integrand,0,lamb,args=(l,lamb))
```

   On obtient $s = 78\,\mathrm{m}$.

2. On calcule :

$$\gamma = \frac{-k^2 a\cos(kx)}{\left(1 + (-ka\sin(kx))^2\right)^{3/2}}.$$

   On a de plus, pour un mouvement dans le sens de croissance de s, à $v_T = cste$:

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad a_N = \gamma\frac{v_T^2}{=}\frac{-k^2 av\cos(kx)}{\left(1 + (-ka\sin(kx))^2\right)^{3/2}}.$$

   Le numérateur de a_N est maximal quand $cos(kx) = \pm 1$, où le dénominateur est minimal. On aura donc :

$$|a_N| = k^2 av = 6{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}.$$

   La courbe ci-dessus montre que l'allure de a_N en fonction de x est peu différente d'une sinusoïde, quand elle est tracée en fonction de x.

   On détermine la période temporelle T selon :

$$T = \frac{s}{v} = \frac{78\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}} = 5{,}6\,\mathrm{s}.$$

   Par ailleurs, on a :

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 + (ka\sin(kx))^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

   Comme $ka = (2\pi/15)$, $\sqrt{1+(ka)^2} = 1{,}01$ et le terme en $ka\sin(kx)$ sera toujours négligeable et $\dot{x} \simeq \mathrm{cste} = v$: les courbes précédentes avec x pour abscisse seront très peu différentes des courbes avec t pour abscisse.

   Pour $v = 100\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, l'accélération tangentielle restera nulle et l'accélération normale sera, en tout point, multipliée par 4.

Correction de l'exercice 18

1. (a) Pour un mouvement du nord vers le sud, l'angle φ reste constant. Il décrit un cercle de rayon R_T à la vitesse v uniforme. On a donc $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R_T}$.

   (b) C'est désormais l'angle θ qui est constant et φ qui varie. Par ailleurs, le cercle décrit a pour rayon $R_T\sin(\theta)$. On a donc $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{R_T\sin(\theta)}$.

2. Pour un mouvement à la surface d'une sphère, les composantes sphériques du vecteur vitesse sont :

$$v_\theta = R_T\dot{\theta} \qquad v_\varphi = R_T\sin(\theta)\dot{\varphi}.$$

   Les informations sur la direction du vecteur vitesse assurent que $v_\theta \geqslant 0$ et $\left|v_\varphi/v_\theta\right| = \tan(\alpha)$. Dans le référentiel de la Terre, le Soleil décrit une révolution en $T = 24\,\mathrm{h}$, d'est en ouest, ce qui correspond à une vitesse angulaire $\dot{\varphi} = -\frac{2\pi}{T}$. L'avion doit avoir la même vitesse angulaire pour suivre le Soleil. On a donc :

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2} = |v_\varphi|\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}} = \frac{2\pi R_T\sin(\theta)}{T}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}}.$$

   On vérifie que la norme v est bien maximale quand il croise l'équateur, c'est-à-dire pour $\theta = \pi/2$.

Correction de l'exercice 19

On calcule les dérivées temporelles de chacun des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ de la manière suivante, illustrée pour $\overrightarrow{e_r}$.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}.$$

Pour la dérivée par rapport à θ, on est dans la situation des coordonnées cylindriques, et on peut écrire directement :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{e_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{e_r},$$

et on observe que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{0}$.

Pour les dérivées par rapport à φ c'est un peu plus compliqué…La dérivée d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ par rapport à un angle s'exprime à l'aide du produit vectoriel du vecteur unitaire définissant l'angle orienté de la rotation par $\overrightarrow{X}$.

Par exemple, pour les rotations d'angle φ, le vecteur dirigeant la rotation est $\overrightarrow{e_z}$. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\varphi} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r} = \sin(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}. \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}\varphi} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}\varphi} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\varphi} = -\left(\sin(\theta)\overrightarrow{e_r} - \cos(\theta)\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

Remarquons que les rotations correspondant à des variations de θ sont des rotations autour du vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$.

Il ne reste ensuite plus qu'à dériver l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques.

Correction de l'exercice 20

1. La lumière doit parcourir la distance $2L$ à c, elle met donc le temps $T' = 2L/c$.

2. (a) L'hypoténuse des triangles représentés vaut $L/\sin\alpha$, la distance parcourue dans ce référentiel vaut donc $2L/\sin\alpha$, soit $T = \frac{2L}{c\sin\alpha}$ si la lumière s'y propage également à c.

   (b) Le miroir se déplace à V dans $\mathscr{R}$. Son abscisse x_M et son ordonnée y_M sont donc données par $x_M = Vt$ et $y_M = L$. L'intersection avec la trajectoire de la lumière : $x = c\cos\alpha t$ et $y = c\sin\alpha t$ pour $r = T/2$ assure donc que $\cos\alpha = V/c$ et donc $T = \frac{2L}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

3. On a bien $T = \gamma T'$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Pour $v \leqslant c$ (imposé par la relativité restreinte sinon cette expression n'est plus définie…) $\gamma \geqslant 1$. À une durée T dans $\mathscr{R}$ correspond une durée inférieure T' dans $\mathscr{R}'$: le temps s'écoule plus lentement dans $\mathscr{R}'$.